

SPIS TREŚCI

Przedmowa	7
1. OPERACJE RÓŻNICZKOWE NA POLACH SKALARNYCH I WEKTOROWYCH	9
1.1. Konwencja sumacyjna	9
1.2. Delta Kroneckera δ_{mn} . Tensor antysymetryczny ϵ_{ijk}	10
1.3. Gradient funkcji skalarnej	11
1.4. Dywergencja wektora	11
1.5. Rotacja wektora	12
1.6. Laplasjan funkcji skalarnej	12
1.7. Ważniejsze związki między wektorami i ich pochodnymi	12
1.8. Współrzędne krzywoliniowe	14
1.9. Elementy drogi wzdłuż linii współrzędnych	16
1.10. Gradient i rotacja we współrzędnych walcowych i sferycznych	16
1.11. Laplasjan we współrzędnych walcowych i sferycznych	17
Zadania	20
2. FUNKCJE ZESPOLONE	21
2.1. Wprowadzenie	21
2.2. Przykłady funkcji zespolonych	22
2.3. Obrazowanie funkcji zespolonych	23
2.4. Różniczkowanie funkcji zespolonych. Funkcje holomorficzne	24
2.5. Całkowanie funkcji zespolonych	25
2.6. Wzór całkowy Cauchy'ego	27
2.7. Szereg Laurenta	27
2.8. Residuum funkcji i jego obliczanie	29
2.9. Obliczanie całek rzeczywistych metodą residuów	30
2.10. Konforemność funkcji holomorficzych	35
Zadania	38
3. FUNKCJE EULERA	40
3.1. Funkcja gamma Eulera	40
3.2. Funkcja beta Eulera	42
3.3. Wzór Stirlinga	43
Zadania	44
4. WIELOMIANY ORTOGONALNE	46
4.1. Definicje ortogonalności	46
4.2. Waga i jej własności	47
4.3. Ogólne własności wielomianów ortogonalnych	49
4.4. Równania różniczkowe dla wielomianów ortogonalnych	50
4.5. Wzór Rodriguesa	51
4.6. Normy wielomianów	57
4.7. Związki rekurencyjne	58
4.8. Funkcje tworzące dla wielomianów ortogonalnych	60
Zadania	64

5.	FUNKCJE SFERYCZNE	66
5.1.	Równanie definiujące funkcje sferyczne i jego rozwiązanie	67
5.2.	Ortogonalność funkcji sferycznych	69
5.3.	Norma funkcji sferycznych	70
5.4.	Pełny wzór na funkcje sferyczne	71
	Zadania	73
6.	FUNKCJE BESSELA	74
6.1.	Równanie różniczkowe na funkcje Bessela. Szereg Bessela	74
6.2.	Funkcje Bessela z indeksem całkowitym i ich funkcja tworząca	76
6.3.	Przedstawienie całkowe funkcji Bessela z indeksem całkowitym	77
6.4.	Funkcja Bessela dla indeksu $1/2$	78
6.5.	Wzory rekurencyjne dla funkcji Bessela	79
6.6.	Zachowanie się funkcji Bessela w pobliżu $x = 0$	80
6.7.	Asymptotyczna postać funkcji Bessela z indeksem półkwadrowym	80
6.8.	Funkcje Neumanna i Hankela	81
6.9.	Sferyczne funkcje Bessela	81
6.10.	Rozwinięcie fali płaskiej na fale kuliste (wzór Rayleigha)	82
6.11.	Metoda przesunięć fazowych w kwantowej teorii rozpraszania	85
6.12.	Ortogonalność funkcji Bessela	87
	Zadania	88
7.	FUNKCJE UOGÓLNIONE (DYSTRYBUCJE)	90
7.1.	Funkcje próbne	90
7.2.	Ciągi funkcji próbnych	92
7.3.	Definicja dystrybucji	93
7.4.	Przykłady dystrybucji	93
7.5.	Ciągi dystrybucyjne	96
7.6.	Ciągi deltopodobne	98
7.7.	Mnożenie dystrybucji przez funkcję	99
7.8.	Różniczkowanie dystrybucji	100
7.9.	Pochodna dystrybucyjna funkcji trzech zmiennych – laplasjan	102
7.10.	Splot dystrybucji	105
7.11.	Superpozycja delty Diraca z funkcją różniczkowalną	107
	Zadania	108
8.	TRANSFORMACJA FOURIERA	111
8.1.	Definicja transformaty Fouriera dla funkcji	111
8.2.	Transformacja odwrotna	113
8.3.	Pochodna transformaty	115
8.4.	Transformata pochodnej. Zastosowanie do równań różniczkowych	115
8.5.	Transformata iloczynu dwóch funkcji	116
8.6.	Transformata splotu dwóch funkcji	117
8.7.	Iloczyn skalarny transformat	117
8.8.	Transformata funkcji przesuniętej	118
8.9.	Transformata funkcji parzystej i nieparzystej	118
8.10.	Transformata Fouriera dystrybucji	119
8.11.	Transformata delty Diraca	120
8.12.	Transformata funkcji stałej	121
8.13.	Transformata dystrybucji przesuniętej	121

8.14	Transformata potęgi	122
8.15	Transformata funkcji sinus	122
8.16	Transformata funkcji schodkowej	123
8.17	Druga definicja transformaty Fouriera: zestawienie wzorów	125
8.18	Transformacja Fouriera-Bessela (Hankela)	125
8.19	Przykłady transformacji Fouriera-Bessela	126
8.20	Przykładowe transformaty trójwymiarowe	128
	Zadania	129
9.	SZEREGI FOURIERA	130
9.1.	Funkcje i dystrybucje periodyczne	130
9.2.	Definicja współczynnika Fouriera	131
9.3.	Szereg Fouriera	132
9.4.	Równość Bessela-Parsewala	133
9.5.	Rozwinięcie w szereg sinusów i cosinusów	133
9.6.	Skończone szeregi Fouriera	135
	Zadania	136
10.	OPERATORY LINIOWE	138
10.1.	Przykłady operatorów liniowych	139
10.2.	Iloczyn operatorów	140
10.3.	Funkcja o argumentzie operatorowym	140
10.4.	Operator przesunięcia	141
10.5.	Sumowanie szeregów operatorowych	141
10.6.	Komutator dwóch operatorów	142
10.7.	Operator sprzężony	143
10.8.	Operator hermitowski (samosprężony)	144
10.9.	Operator odwrotny	145
10.10.	Operator unitarny	145
10.11.	Elementy macierzowe operatora	146
10.12.	Ślad operatora	147
10.13.	Wektory i wartości własne	147
10.14.	Zagadnienie własne dla operatorów hermitowskich	148
	Zadania	149
11.	OPERATORY KREACJI I ANIHILACJI	151
11.1.	Definicja operatorów kreacji i anihilacji dla bozonów	151
11.2.	Bozonowy operator liczby cząstek	152
11.3.	Związki komutacyjne dla operatorów bozonowych	152
11.4.	Fermionowe operatory kreacji i anihilacji	153
11.5.	Fermionowy operator liczby cząstek	153
11.6.	Związki komutacyjne dla operatorów fermionowych	154
11.7.	Potęgowanie i mnożenie operatorów kreacji i anihilacji	155
11.8.	Operatory polowe	156
11.9.	Wyrażenie dowolnych operatorów jednocząstkowych przez operatory kreacji i anihilacji	156
11.10.	Diagonalizacja operatora jednocząstkowego	158
11.11.	Operatory dwucząstkowe wyrażone przez operatory kreacji i anihilacji	159
	Zadania	160

12.	TRANSFORMACJA LAPLACE'A	162
12.1.	Definicja transformaty Laplace'a	162
12.2.	Przykłady transformat	162
12.3.	Transformacja odwrotna	163
12.4.	Transformata pochodnej	165
12.5.	Transformata całki z oryginału	165
12.6.	Rozwiązanie równań różniczkowych metodą transformacji Laplace'a	166
12.7.	Inne własności transformacji Laplace'a	168
	Zadania	168
13.	FUNKCJE GREENA	170
13.1.	Funkcje Greena dla równań różniczkowych	170
13.2.	Funkcja Greena dla oscylatora harmonicznego	172
13.3.	Funkcja Greena dla kwantowej cząstki swobodnej	173
13.4.	Operatorowa definicja funkcji Greena	175
13.5.	Elementy macierzowe funkcji Greena w dowolnej bazie	176
13.6.	Wyrażenie funkcji Greena przez funkcje własne operatora H	177
13.7.	Funkcje Greena a operatory kreacji i anihilacji	178
13.8.	Rachunek zaburzeń dla funkcji Greena	179
13.9.	Związek ze stacjonarnym równaniem Schrödingera	180
13.10.	Związek funkcji Greena z funkcją gęstości stanów	181
	Zadania	182
14.	RACHUNEK WARIACYJNY	183
14.1.	Wariacja funkcji i funkcjonału	184
14.2.	Ekstremum funkcjonału	184
14.3.	Równania Eulera	185
14.4.	Zastosowania fizyczne	186
14.5.	Ekstrema warunkowe	187
	Dodatek. RÓWNANIA RÓŻNICOWE LINIOWE	189
	D1. Równania liniowe pierwszego rzędu	189
	D2. Równania jednorodnego rzędu drugiego	190
	Zadania	192
	Odpowiedzi do zadań	193
	Literatura	200